INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

Azul School

José Antonio Enriquez

Universidad Nacional Atónoma de México (UNAM)

19/10/2020

CAPITULO 2. Tecnicas de conteo

> Para calcular probabilidades de eventos bajo el supuesto de que los resultados son igualmente probables, es necesario hacer una lista de todos posibles resultados de dichos eventos, esto puede ser tedioso y se debe estar seguro que no se ha omitido ninguno de ellos; puesto que el listado puede ser muy grande es conveniente conocer las herramientas que simplifiquen su cálculo.

2.1 Principio de multiplicación o regla del producto

> Si un procedimiento A_1 puede efectuarse de n_1 formas distintas y un segundo procedimiento A_2 puede realizarse de n_2 formas diferentes, entonces el total de formas en que puede efectuarse el primer procedimiento, seguido del segundo, es el producto $n_1 \cdot n_2$.

Así, si un hombre tiene 2 camisas y 4 corbatas entonces tiene 8 maneras de escoger una camisa y una corbata.

> El principio de multiplicaciónn es válido no solamente para dos procedimientos, sino que también vale para cualquier sucesión finita de procedimientos. Por ejemplo, si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ denotan k procedimientos sucesivos que se pueden realizar de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ maneras respectivamente, entonces el total de formas en que puede efectuarse el primer procedimiento, seguido del segundo,…,seguido de k-ésimo procedimiento es el producto $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

De esta manera si un hombre tiene 4 pantalones distintos, 6 camisas y dos pares de zapatos. ¿De cúantas formas distintas puede el hombre vestirse con estas prendas?

Solución.El hombre se puede vestir de manera distinta durante $4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$ días sin repetir una combinación

Ejemplo 2.1

Cuatro compañías tienen empleos disponibles en cada una de tres áreas: ventas, manufactura y personal, el número total de oportunidades de empleo que hay disponibles es: Número de compañías * Número de áreas de empleo, esto es $4 \cdot 3 = 12$ empleos.

Ejemplo 2.2

Un empleado tiene facultad de escoger un curso de capacitación en finanzas o en administración de riesgos, los cuales se ofrecen en tres horarios, y con tres diferentes instructores en cada horario. ¿Cuántas opciones se ofrecen al empleado?, se ofrecen $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ opciones

Resuelva 2.1

En el año 2000 los números telefónicos eran de ocho dígitos de los cuales el primero tenía que ser 5 y el segundo no puede ser 0,1, ni 9 ¿cuántos números telefónicos se formarán con las restricciones?

2.2 Principio de suma o regla de la suma

> Si se desea llevar a efecto una actividad, la cual tiene formas alternativas para ser realizada, donde la primera de esas alternativas puede ser realizada de n_1 maneras o formas, la segunda alternativa puede realizarse de n_2 maneras o formas,…, la k-ésima de las alternativas puede ser realizada de n_k maneras o formas, entonces esta actividad puede llevarse a cabo de $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ maneras o formas.

Ejemplo 2.3

Una personas desea comprar una lavadora de ropa, para lo cuál ha pensado que puede seleccionar de entre las marcas Whirpool, Easy y General Electric, cuando acude a hacer la compra se encuentra que la lavadora Whirpool se presenta en dos tipos (8 u 11 kg), en cuatro colores diferentes y puede ser automática o semi automática, mientras que la lavadora Easy, se presenta en tres tipos de carga (8, 11 o 15 kg), en dos colores diferentes y puede ser automática o semiautomática y la lavadora General Electric, se presenta en un solo tipo de carga, de 11 kg, dos colores diferentes y solo hay semiautomática. ¿cuántas maneras tiene esta persona de comprar una lavadora?

- n_1 = Número de maneras de seleccionar una lavadora Whirpool $= 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ maneras
- n_2= Número de maneras de seleccionar una lavadora Easy $= 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ maneras
- n_3 = Número de maneras de seleccionar una lavadora GE $= 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$ maneras.

por lo tanto la lavadora se puede escoger de $n_1 + n_2 + n_3 = 30$ maneras diferentes.

Nota: es interesante notar que la compra de una lavadora responde a una frase “o compro Whirpool o Easy o General Electric”, pero no se compran más de una.

2.3 Permutaciones y Combinaciones

¿Qué diferencia hay?

Normalmente usamos la palabra “combinación” descuidadamente, sin pensar en si el orden de las cosas es importante. En otras palabras:

“Mi ensalada de frutas es una combinación de manzanas, uvas y bananas”: no importa en qué orden pusimos las frutas, podría ser “bananas, uvas y manzanas” o “uvas, manzanas y bananas”, es la misma ensalada.

“La combinación de la cerradura es 472”: ahora sí importa el orden. “724” no funcionaría, ni “247”. Tiene que ser exactamente 4−7−2.

Así que en matemáticas usamos un lenguaje más preciso:

- Si el orden no importa, es una combinación.
- Si el orden sí importa es una permutación.

¿Qué es el factorial de un número?

Es el producto de n por todos los naturales menores que el y se representa con el $n!$

$n!$=$n \cdot (n-1)!(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Ejemplo 2.4

Hallar $6!$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Ejemplo 2.5

Hallar$4!$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

NOTA: Considerando que todos los productos tienen por lo menos dosfactores, no tienen sentido los símbolos $0!$ Y $1!$, pero para poder aplicar las fórmulas a todos los casos, se definen los números factoriales de 0 y de 1 como $0! = 1$ y $1! = 1$.

Permutaciones

> La Permutación también conocida como ordenación, es un arreglo de todo o parte de un determinado número de objetos, diferenciándose unos de otros solamente por el ordenamiento.

Caso 1: Todos los objetos son distinguibles

Se llama permutación de n objetos diferentes, ${}_nP_n$, a un arreglo de n objetos en orden definido.

El número de permutaciones posibles al arreglar n objetos es: ${}_nP_n = n!$

Si consideramos n objetos y deseamos permutar r de esos objetos $(r < n)$ seleccionados al azar, el número de maneras de hacerlo es: ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

Ejemplo 2.6

El número de ordenamientos diferentes que contiene tres letras cada uno y que se pueden formar con las siete letras: a, b, c, d, e, f, g es ${}_7P_3 = 210$ permutaciones

El número de ordenamientos de las siete letras es ${}_7P_7 = 5040$

Ejemplo 2.7 ¿De cuántas manera pueden sentarse 10 personas en una banca que tiene cuatro asientos disponibles ${}_{10}P_4 = 5040$

Ejemplo 2.8

7. Se inscriben A, B y C en una carrera. El número de formas en que se puede alcanzar la meta se calcula como un arreglo ordenado de 3 sujetos en tres lugares, esto es: ${}_3P_3 = 6$

Resuelva 2.2 Se quieren sentar 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los sitios pares. ¿De cuántas formas pueden sentarse?

Caso 2: Cuando no todos los objetos son distinguibles.

Aplicable cuando se requiere permutar un grupo de objetos entre los cuales hay algunos que son distintos pero indistinguibles entre sí, que para fines prácticos se considera iguales o idénticos.

Suponga que se tienen n objetos tales que hay n_1 de la clase 1, n_2 de la clase 2,..., y n_k de la clase k tales que $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ el número de formas de ordenar esos objetos es:

$${}_nP_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

Ejemplo 2.9

Una contraseña requiere de 5 letras, si se desea que ésta contenga tres letras A y dos letras B, ¿cuántas contraseñas diferentes se pueden formar? ${}_5P_{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

Resuelva 2.3

Considere 10 objetos, 5 de ellos son rojos, 3 amarillos y 2 azules, El número de formas de ordenar los 10 objetos es :

Caso 3: Permutaciones circulares

La permutación circular, es un caso de permutación en el cual los elementos se ordenan en círculo. De modo que el primero elemento que se sitúa en el ordenamiento, determina el principio y el final del arreglo.

El número de permutaciones circulares de n objetos es: ${}_nPC_n = (n-1)!$

Combinaciones

> Como ya se mencionó con anterioridad, una combinación, es un arreglo de elementos en donde no es de interes el lugar o posición que ocupan los mismos dentro del arreglo. En una combinación interesa formar grupos y el contenido de los mismos.

La fórmula para determinar el número de combinaciones es:

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

${}_nC_r =$ Combinaciones de n objetos tomados de r en r

Donde se observa que, ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$

La expresión anterior nos explica como las combinaciones de n objetos tomados de r en r objetos pueden ser obtenidas a partir de las permutaciones de n objetos tomados de r en r objetos, esto se debe a que como en las combinaciones no nos importa el orden de los objetos, entonces si tenemos las permutaciones de esos objetos al dividirlas entre r!, les estamos quitando el orden y por tanto transformándolas en combinaciones, de otra forma, también si se desea calcular permutaciones y se tienen las combinaciones, simplemente con multiplicar estas por el r! se obtendran las permutaciones requeridas.

$${}_nP_r = {}_nC_r \cdot r!$$

Si $r = n$ entonces;

$${}_nC_n = \frac{n!}{(n-n)!\cdot n!} = \frac{n!}{(0)!\cdot n!} = 1$$

¿Qué nos indica lo anterior?

Que cuando se desea formar grupos con la misma cantidad de elementos con que se cuenta solo es posible formar un grupo.

Ejemplo 2.10

1. Si se cuenta con 14 alumnos que desean colaborar en una campaña pro limpieza de su universidad, cuantos grupos de limpieza podrán formarse si se desea que consten de 5 alumnos cada uno de ellos
2. si entre los 14 alumnos hay 8 mujeres, ¿cuantos de los grupos de limpieza tendrán a 3 mujeres?
3. ¿cuántos de los grupos de limpieza contarán con 4 hombres por lo menos?

Solución:

1. $n = 14, r = 5$

$${}_{14}C_5 = \frac{14!}{(14-5)!5!} = \frac{14!}{9!5!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9!5!} = 2002$$

Entre los 2002 grupos de limpieza hay grupos que contienen solo hombres, grupos que contienen solo mujeres y grupos mixtos, con hombres y mujeres.

2. $n = 14$ (8 mujeres y 6 hombres), $r = 5$

En este caso es de interés aquellos grupos que contengan 3 mujeres y 2 hombres

$${}_8C_3 \cdot {}_6C_2 = \frac{8!}{(8-3)!3!)} \cdot \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{6!}{4!2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2!}$$

= 840 grupos con 3 mujeres y 2 hombres, puesto que cada grupo debe constar de 5 personas

3. En este caso nos interesan grupos en donde haya 4 hombres o más

Los grupos de interés son = grupos con 4 hombres o grupos con 5 hombres

$${}_6C_4 \cdot {}_8C_1 + {}_6C_5 \cdot {}_8C_0 = (15\cdot 8) + (6\cdot 1) = 120 + 6 = 126$$

Resuelva 2.4

Un chef va a preparar una ensalada de verduras con tomate, zanahoria, papa y brócoli. ¿De cuántas formas se puede preparar la ensalada usando solo 2 ingredientes?